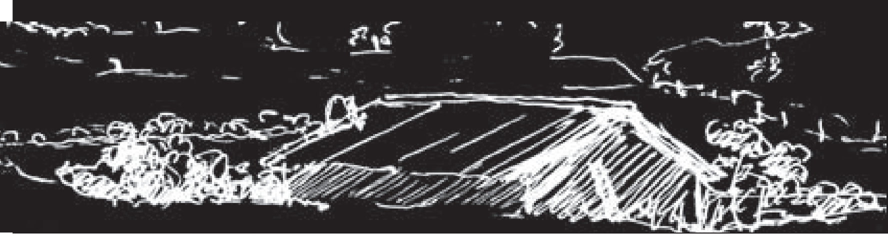
# Técnicas en el procesamiento digital de imágeneS: una constante exploración de nuevos campos.



Mauricio Díaz Melo
Ingeniero Electrónico
Magister en Ingeniería Electrónica
Coordinador del Centro de Investigación de la Escuela de Ingeniería
Corporación Universitaria Unitec

El procesamiento digital de imágenes es el resultado de la interacción de varias áreas de estudio –como el análisis matemático y el tratamiento de señales– guiadas por diferentes técnicas de programación y optimización. Este artículo busca mostrar, a aquellas personas que deseen comenzar a trabajar con imágenes, un modelo matemático sencillo que permita visualizarlas como señales bidimensionales y entender su comportamiento de una forma básica al ser procesadas por medios digitales. De la misma forma, exponer algunas de las nuevas tendencias que se trabajan en la actualidad sobre este tema.

El principal objetivo del procesamiento digital de imágenes es proponer y visualizar la viabilidad de diferentes soluciones a un problema específico, aplicándolas sobre una función en un espacio bidimensional (imágenes) o, en algunos casos, tridimensional (secuencias de imágenes). Usualmente, encontrar una solución óptima implica el planteamiento de un algoritmo; éste, se basa en una teoría que debe ser comprobada haciendo un extenso trabajo experimental a través de un *software* de simulación y grandes cantidades de imágenes de prueba.

## Introducción

Debido a la gran cantidad de información que contienen las imágenes digitales (millones de píxeles), el procesamiento de ellas no fue de interés por parte de la comunidad científica hasta la década de 1970, cuando aparecieron herramientas adecuadas para realizar el trabajo en tiempos de ejecución relativamente reducidos [1]. Estas herramientas *(hardware)* fueron el resultado de la creación de los circuitos integrados (1953), los cuales, de igual forma, se deben a la invención del diodo (o válvula de dos terminales) a comienzo del siglo XX (1905), evento con el cual se da inicio formal a la electrónica como un área de estudio particular de las ciencias aplicadas.

Los circuitos integrados permitieron fabricar a bajo costo y con una pequeña dimensión física, herramientas especializadas que se utilizaron, en un comienzo, como *hardware* específico en los sistemas de televisión y en las grandes producciones del medio audiovisual [1, 2]. Sin embargo, el procesamiento de imágenes ha cobrado un auge inusitado en las últimas décadas; las razones: la aparición de computadores cada vez más robustos, eficientes y veloces, y la creación de los dispositivos conocidos como DSP (procesadores digitales de señales).

Hoy en día, el procesamiento digital de señales supera ampliamente al procesamiento de señales por medios análogos, por sus bajos costos y reducido tiempo de procesamiento. Los medios análogos han pasado a un segundo plano y el mundo tiende a digitalizarse[1]: la música en mp3, las cámaras digitales, la televisión de alta definición, etc.

## ¿Qué es el procesamiento digital de imágenes?

Una imagen puede modelarse como una función bidimensional f(x,y), donde *x* y *y* son coordenadas es-

paciales y el valor de la función en ese punto representa la energía o intensidad de luz recibida. Cuando los valores de *x*, y *y* f(x,y) son todos valores finitos, podemos hablar de una imagen digital [1,3]. El procesamiento de este tipo de imágenes por medio de computadores digitales es lo que se conoce con el nombre de procesamiento digital de imágenes. Una imagen de este tipo está conformada, por lo tanto, por una gran cantidad de elementos) denominados píxeles, palabra importada y finalmente aceptado en nuestro medio.

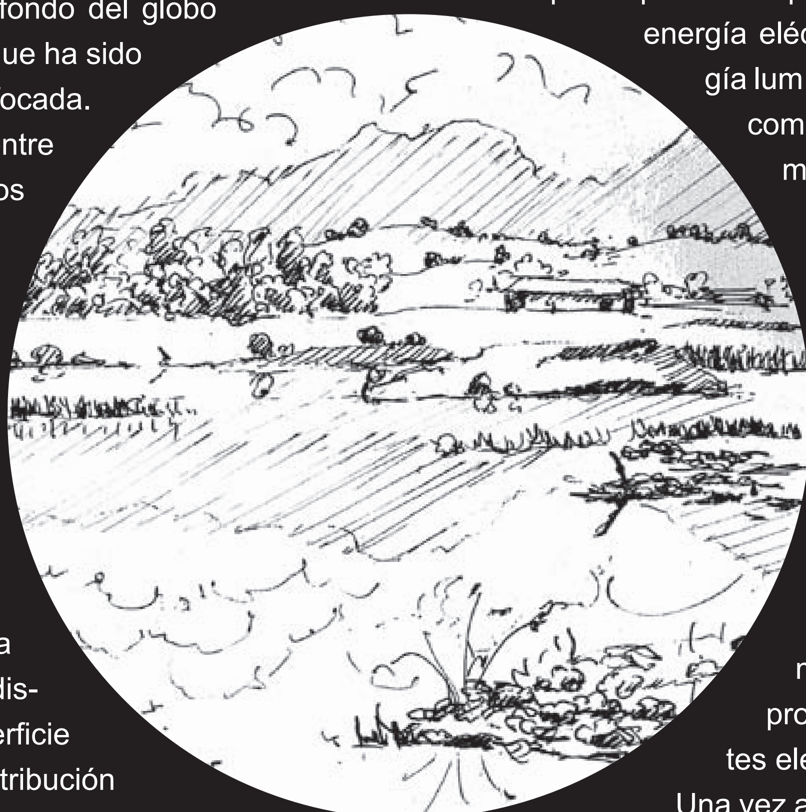
El procesamiento de imágenes trae consigo un interés, como consecuencia del avanzado grado de desarrollo del sentido de la vista en los seres humanos y la dependencia casi exclusiva de él para nuestra supervivencia. Es por esto que las imágenes juegan un papel sorprendente –desde el punto de vista de representación de conceptos– en la percepción humana. David Marr, matemático y neurocientífico, publicó un famoso documento titulado *Visión* [4], el cual serviría de punto de referencia a nivel mundial. En él describe a la visión como “el proceso que produce desde las imágenes del mundo exterior una descripción que es útil para el observador y no es confundida con información irrelevante”. Según esta definición, las imágenes juegan un papel primordial en este proceso.

Diversos autores difieren en el rango de alcance del procesamiento de imágenes, puesto que no existen fronteras bien definidas con otros tópicos como la visión computarizada o el análisis de imágenes. Esto implica, muchas veces, categorizar mal un proyecto o trabajar en diferentes áreas que se encuentran estrechamente unidas. Una forma de definir un sistema que procesa imágenes digitales es diciendo que éste recibe como entrada una imagen y genera como salida una imagen; por otra parte, un algoritmo de análisis de imagen recibe una imagen de entrada y produce una salida que es un descriptor (de cualquier clase) de la imagen de entrada (por ejemplo el valor medio de los niveles de intensidad). Finalmente, un sistema puede ubicarse dentro del área de la visión computarizada si se encarga de simular la forma como funciona el sistema visual humano para imitarlo por medio de algoritmos en ejecutados en un *hardware* específico. Esta rama pertenece, por sí misma, a la inteligencia artificial, cuyo objetivo es emular la inteligencia del ser humano.

## Fundamentos básicos de las imágenes digitales.

Antes que nada es importante comprender el funcionamiento básico del sistema visual humano, a pesar de que el campo de las imágenes digitales está desarrollado a partir de modelos matemáticos y formulaciones probabilísticas. Este análisis y comprensión básicos pueden jugar un papel primordial en la escogencia de una técnica u otra, ya que muchas veces la apreciación subjetiva del usuario final predomina sobre cualquier evaluación o medición objetiva y cuantificable que pueda hacerse [1, 5].

El ojo humano posee dos clases de receptores: los conos y los bastiones. Estos componen una distribución discreta en el fondo del globo ocular y captan la luz que ha sido apropiadamente enfocada. Existen en promedio entre 6 y 7 millones de conos en cada ojo; se localizan en la parte central de la retina, denominada la fóvea y son altamente sensitivos al color (sin conos veríamos en blanco y negro). El número de bastiones es mucho mayor –entre 75 a 150 millones– y se distribuyen sobre la superficie de la retina. Esta distribución y la característica de que estén conectados a una sola terminación nerviosa disminuyen la cantidad de detalle que puedan inferir estos receptores. Los bastiones brindan un panorama general de la escena (un bosquejo) definiendo formas básicas y tienen la capacidad de ser útiles en condiciones precarias de iluminación. Estos receptores se conectan al nervio óptico, el cual no es otra cosa que la terminación (axón) de las neuronas que se encargan de trasmitir la información al cerebro. Más allá de este punto, en lo referente a la construcción de la imagen en el cerebro, es poca la información que se posee, a pesar de los grandes adelantos en las últimas décadas. Actualmente la discusión se centra en la formulación de un modelo neurobiológico completo que pueda describir de manera integral el sistema de visión humano.



Este sistema de visión se ve hoy en día reflejado en las formas más comunes de adquisición de imágenes digitales, mediante el uso de arreglos de sensores o CCD (*Charge Coupled Devices*). Estos son dispositivos electrónicos compuestos por millones de celdas, cada una de las cuales es excitada por una onda lumínica determinada, generando en conjunto una imagen. Las cámaras digitales (de fotografía y video) poseen mínimo un CCD el cual actúa como el alma del dispositivo (haciendo el papel de los conos y bastiones). Un CCD es un circuito integrado conformado por capacitores que almacenan una determinada energía eléctrica que representa una energía lumínica. Uno de los problemas más comunes en un sistema de procesamiento de imágenes tiene que ver con la adquisición de la señal. El tipo de dispositivo y las condiciones de adquisición juegan un papel predeterminante en el sistema. Por ejemplo, a menudo la calibración y modelamiento de la cámara es un requisito previo a un estudio para obtener resultados importantes. De esta forma se minimizan los efectos del ruido producido por algunos componentes eléctricos.

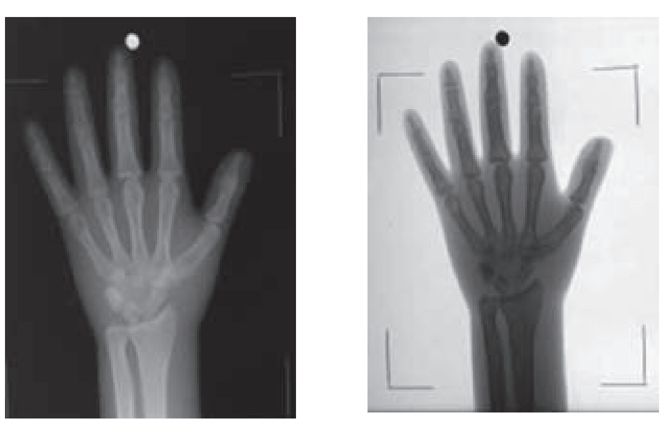
Una vez adquirida la imagen, ésta se asocia a un espacio de color, entrando en juego la teoría del color y los diferentes espacios que se utilizan para representar la imagen adquirida. Por ejemplo, la mayoría de sistemas que utilizamos a diario trabajan con un espacio de color denominado RGB, el cual se representa mediante un cubo. En el espacio tridimensional RGB, cada vértice del cubo representa un color primario (espacio aditivo) rojo (R), verde (G) y azul (B). Los vértices restantes representan los colores secundarios (o primarios en el espacio sustractivo), amarillo (Y), cyan (C), magenta (M), blanco (W) y negro (B). Los puntos a lo largo de la diagonal entre el vértice blanco y negro conforman los colores atonales (escala de grises). Existen otros modelos como el CMYK (cyan, magenta y amarillo) o el HSI (tono, saturación, intensidad). La escogencia del determinado espacio de color es una tarea muy importante para el éxito del sistema a diseñar. Para efectos prácticos, los algoritmos descritos en este artículo aplicarán para imágenes en tonos de grises, la cual se encuentra promediando los canales RGB, teniendo en cuenta que sus aplicaciones se pueden extender fácilmente a imágenes en color.

## Técnicas en el dominio espacial

La expresión *dominio espacial* hace referencia a la modificación directa de los píxeles que componen una imagen. Un sistema que hace este tipo de procesamiento se pude denotar mediante la siguiente expresión:

$$g(x,y)=T[f(x,y)],$$

donde $f(x,y)$ es la imagen de entrada, $g(x,y)$ es la imagen procesada y $T$ es un operador en $f$, definido como una transformación $NxM \rightarrow NxM$ dimensiones. Esta transformación igualmente involucra un conjunto definido de píxeles vecinos. Algunas transformaciones sobre los niveles de escala de grises pueden servir para mejorar los detalles en imágenes, por ejemplo, en imágenes radiológicas (figura 1).



(a) (b)

*Figura 1. (a) Imagen radiológica original. (b) Imagen obtenida usando una transformación negativa.*

Las transformaciones en escalas de grises buscan mejorar características como el contraste y la luminosidad, alterando los valores de los píxeles mediante la relación que se describe por $S=T(r)$. La transformación $T$ traslada los valores de los píxeles $r$ en valores de píxeles en $s$. Dado que estos son valores digitales, usualmente estas transformaciones se realizan con tablas predeterminadas, previamente almacenadas en memoria para ahorrar tiempo de cómputo. Algunas de las transformaciones más comunes se muestran a continuación:

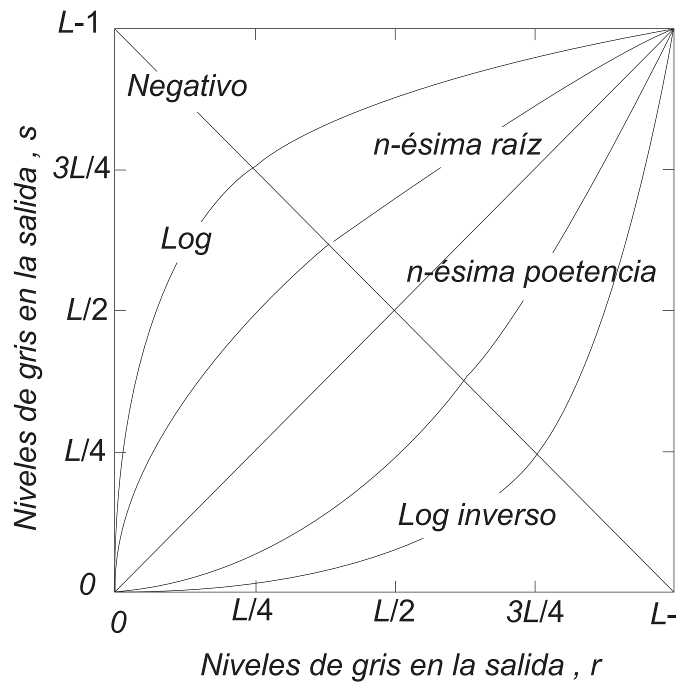
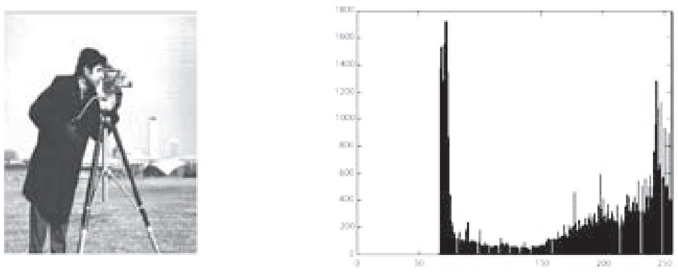


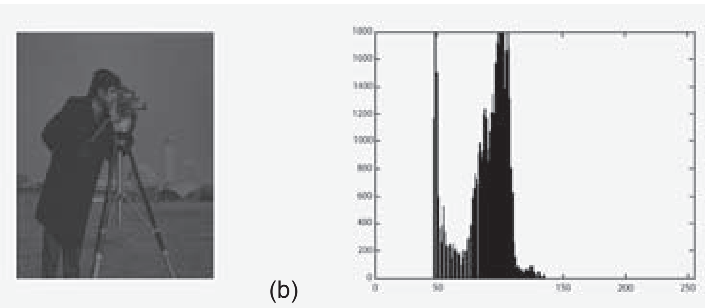

*Figura 2. Algunas transformaciones en niveles de gris usadas para mejorar la imagen. Gráfica tomada de [1]*

Otra alternativa válida para el procesamiento de imágenes en el dominio espacial consiste en hacer uso del histograma. Este se define como una función de probabilidad que almacena la repetición de un suceso. En una imagen digital, cuyos niveles de gris están en el rango $[0,L-1]$, es una función discreta $h(r_k)=n_k$ donde $r_k$ es el k-ésimo nivel de gris y $n_k$ es el número de píxeles en la imagen que tienen ese valor de intensidad.

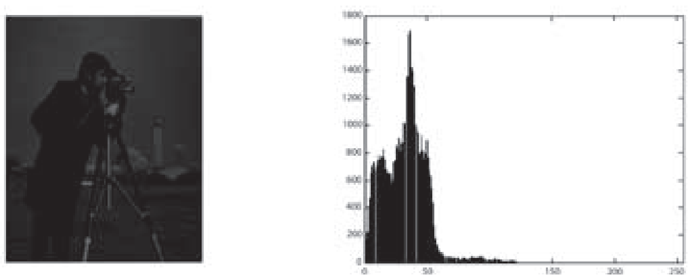
La manipulación del histograma es la base de muchas transformaciones en el dominio espacial. Las operaciones que se pueden realizar con este pueden brindar mejoras a la imagen en contraste, brillo o simplemente dar información estadística que pueda ser utilizada en otros procesos.



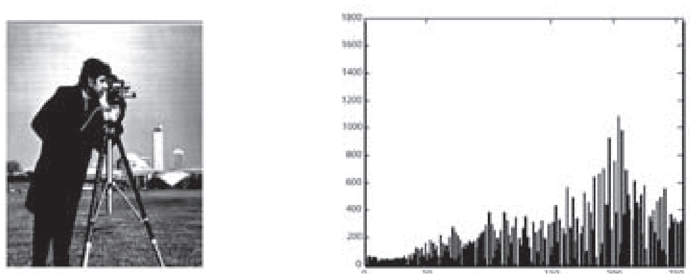
(a)



(b)



(c)



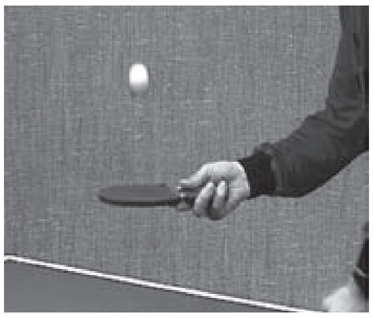
(d)

*Figura 3. Procesamiento por medio del histograma. (a) Imagen con alto brillo. (b) Imagen con bajo brillo. (c) Imagen con bajo contraste. (d) Imagen con alto contraste.*

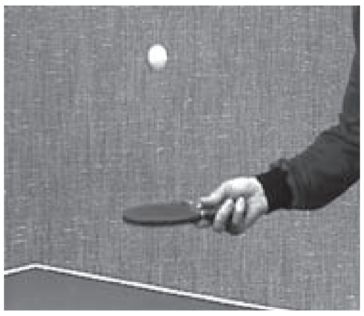
Otra de las alternativas utilizadas para el procesamiento en el dominio espacial consiste en la utilización de operaciones matemáticas y/o lógicas entre imágenes para obtener los resultados deseados. Estas operaciones se realizan entre dos imágenes, píxel a píxel (con excepción de la operación NOT que sólo involucra una imagen). Las más usadas son AND, NOT, OR y operaciones como substracción, suma, multiplicación. Por ejemplo, en el campo de la astrofotografía aficionada, es común tomar secuencias de fotos y promediarlas para obtener mejores resultados. De igual forma, debido a las características del ruido producido por los CCD, es común restar de la imagen que se quiere una fotografía tomada al vacío reduciendo el efecto de la perturbación. Otro ejemplo comúnmente usado es la substracción. La diferencia entre dos imágenes y $f(x,y)$ y $h(x,y)$ puede expresarse como:

$$h(x,y)=f(x,y)-h(x,y)$$

Esta operación se emplea a menudo en video para determinar los elementos en movimiento en una secuencia de cuadros (figura 4).



(a)



(b)

(c)

Figura 4. Operaciones matemáticas entre imágenes. (a) Imagen enésima. (b) Imagen enésima+N. (c) Valor absoluto de la diferencia umbralizada entre la imagen enésima y la imagen enésima+N

## Técnicas en el dominio de la frecuencia

La manipulación de señales en el dominio de la frecuencia se debe fundamentalmente al trabajo realizado por el matemático francés Joseph Baptiste Fourier,

publicado a principios del siglo XIX, denominado *La Théorie Analitique de la Chaleur (La teoría analítica del calor).* Fourier, a quien hoy debemos muchos de los avances en aplicaciones tan cotidianas como las comunicaciones (radio, televisión y los principios más básicos de la telefonía inalámbrica), nunca se imaginó los alcances que tendría su controvertida y discutida teoría. Fue discípulo de Laplace, otro de los grandes matemáticos franceses de la historia. Y fue precisamente él mismo (su maestro) quien primero puso en duda las teorías propuestas por Fourier [6, 7]. La idea básica –y mayor contribución de Fourier– fue representar una señal periódica (una señal que se repite cada intervalo de tiempo (T) como una combinación de funciones senoidales, lo cual, para sus colegas de la época, era algo inconcebible; este planteamiento recibió el nombre de la *serie de Fourier*. Por ejemplo, una función con discontinuidades o cambio abruptos, sencillamente era imposible que fuera representada con una función "suave" como es una senoidal, o por lo menos eso se creía. A pesar de las diversas discusiones que se presentaron, no fue sino hasta después de la muerte de Fourier que un matemático de apellido Dirichlet pudo demostrar bajo qué condiciones se podía representar una señal como una combinación de señales senoidales, validando de esta forma el trabajo iniciado por Fourier. Posteriormente surgió el análisis por medio de la *transformada de Fourier,* el cual no es más que una extensión de la teoría planteada originalmente, pero para señales que no sean necesariamente periódicas. A partir de estas formulaciones se comenzó a hablar del dominio de la frecuencia, ya que la transformada de Fourier puede verse como un cambio en el dominio de la función:

$$\textit{Tiempo } (t) \xrightarrow{\text{Transformada de Fourier F}} \textit{Frecuencia}(w)$$

Surge entonces el problema de visualizar la frecuencia. ¿Qué es la frecuencia? Podríamos decir que es el inverso del período, como nos enseñaron en las clases de física de la educación secundaria. Pero, entonces, ¿qué es el período? El período es una medida relacionada tiempo; puede ser más fácil definir el período ya que se encuentra asociado al tiempo, y de este último tenemos un conocimiento intuitivo, más no exacto de lo que pueda ser; y si nos remitimos a la relatividad el asunto se vuelve aún más complejo. Desde el punto de vista matemático, se define el período de una señal como aquel valor para el cual $f(t)=f(t+T)$ para todo $t$, es decir, que la señal no tiene cambios con respecto a su variable independiente (en este caso, tiempo).

Vale la pena analizar la definición de frecuencia para algunas señales específicas. Por ejemplo, en una señal de audio la frecuencia está asociada a las notas de la escala diatónica; la nota LA se asocia a una frecuencia de 440 Hertz (Hz). Cuando hablamos de la luz (comportándose como una onda y no como una partícula) podemos asociar los colores (luz visible) a frecuencias específicas, ubicando los colores en el espectro electromagnético en frecuencias que van desde 350THz el (violeta) hasta los 384THz (rojo). Pero en una imagen (señal bidimensional), ¿qué puede representar la frecuencia? Para responder esta pregunta, haremos algunos planteamientos matemáticos, a pesar de que la finalidad de este documento no es profundizar en estos aspectos. La transformada de Fourier para una señal unidimensional se define como [1]:

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}\,dt$$

Donde $j=\sqrt{-1}$. La trasformada inversa o ecuación de síntesis que determina $f(x)$ a partir de su trasformada está definida como:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(u)e^{j2\pi ux}\,du$$

Para las señales bidimensionales como las imágenes estas ecuaciones pueden extenderse a las variables $u$ y $v$.

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dxdy$$

y la transformada inversa,

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}\,dudv$$

Sin embargo, al trabajar con imágenes discretas, nuestro interés estará enfocado a la representación discreta de la transformada y su efectiva implementación de sistemas de procesamiento digital. Para esto se hace uso de la *transformada discreta de Fourier* (DFT), cuya implementación mediante de FFT (*fast Fourier transform)* permite obtener algoritmos útiles y eficientes. La DFT bidimensional de una imagen $f(x,y)$ de tamaño $M$x$N$ está dada por:

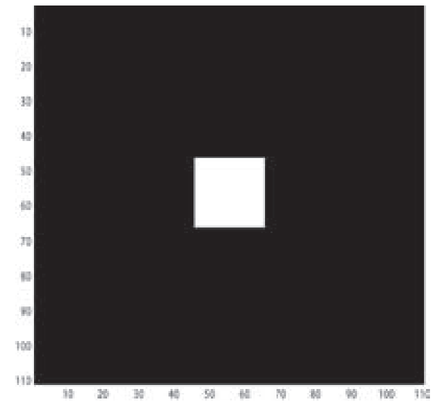
$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Y su inversa por:

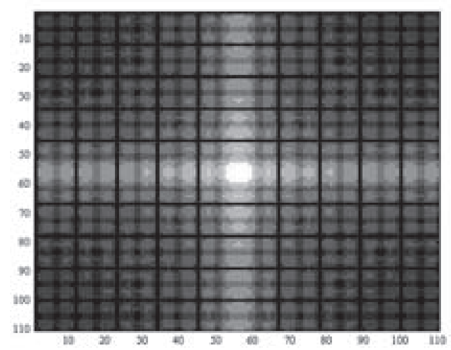
$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Es importante visualizar que el resultado puede ser un número complejo, por lo tanto, su resultado se expresa en función de la magnitud y de la fase.

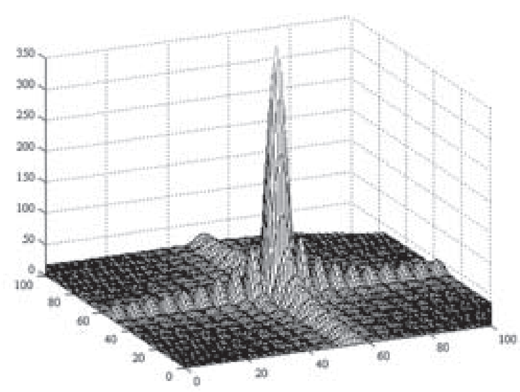
Teniendo esto en cuenta es posible visualizar la transformada de una función pulso bidimensional, como se muestra a continuación:



(a)



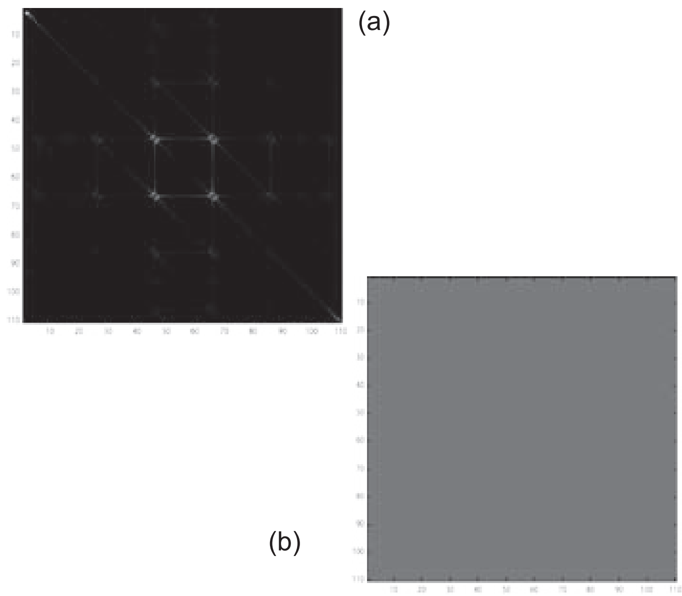
(b)



(c)

*Figura 5. Transformada de Fourier de un pulso bidimensional. (a) Pulso bidimensional. (b) Magnitud de la transformada de Fourier como imagen. (c) Magnitud de la transformada de Fourier como un función bidimensional*

La gráfica de la figura 6(c) muestra la magnitud de la DFT bidimensional de la imagen que representa un pulso. Como se podría esperar, ésta es una función impulsiva que va decreciendo de acuerdo a la forma definida por la función $sinc(x)=\frac{\sin x}{x}$. Hagamos otro experimento; con la misma imagen vamos a reconstruir la señal original haciendo, primero, la magnitud igual a cero y, después, la fase igual a cero. De esta forma obtenemos:



(a)

(b)

Figura 6. Reconstrucción de la figura 5 (a) usando la transformación inversa. (a) Manteniendo la fase y anulando la magnitud. (b) Manteniendo la magnitud y anulando la fase.

Es claro que la figura de la fase 7(a) es de una gran importancia ya que conlleva la mayor parte de la información. Mientras que al hacer la fase cero y conservar la magnitud, la imagen sintetizada es una imagen plana que no brinda ninguna información (figura 7(b)). A partir de esto podemos deducir que la fase de la transformada de Fourier en imágenes está relacionada con la información de bordes de los objetos y, por lo tanto, con la inteligibilidad de la señal.

Este trabajo en el dominio de la frecuencia permite el diseño de sistemas específicos que atenúen un determinado rango de frecuencias (filtrado), realizando labores como la atenuación o el realce de bordes, la reducción de ruido o, en general, el mejoramiento de la imagen. Por ejemplo, visualicemos cómo podemos utilizar la DFT para procesar una imagen fotorealística. Cuando trabajamos con la fotografía 'lena' (una imagen estándar para la realización de pruebas en procesamiento de imágenes dadas sus valiosas características de textura y tonalidad) podemos procesarla mediante el empleo de un filtro pasa altos que mejora el contraste de la imagen. Este filtro tiene la siguiente respuesta en frecuencia:

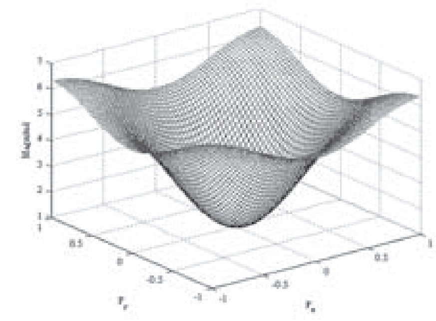


Figura 7. Respuesta en frecuencia del filtro "bordes definidos".

(a)

(b)

Figura 8. (a) Imagen original. (b) Imagen con bordes definidos.

La imagen de la figura 8(b), por lo tanto, tiene unos bordes mejor definidos y un mejor contraste.

## Técnicas multiresolución (wavelets)

A pesar de que el análisis de Fourier ha sido desde hace mucho tiempo la base del procesamiento basado en las transformaciones de dominio, desde finales de la década de los setentas numerosos matemáticos en el mundo entero han trabajado en la búsqueda de otra transformación que permita mantener al mismo tiempo información temporal y espectral. Estos esfuerzos han dado sus frutos y de ellos ha surgido la teoría denominada *análisis multiresolución*. Dentro de esta área, y como caso específico, se puede ubicar la transformada *Wavelet* (ondita) y su caso particular para las señales discretas, la *Discrete Wavelet Transform* (DWT). Esta transformada está haciendo hoy en día aún más fácil la compresión, transmisión y análisis de muchas imágenes. A diferencia de la transformada de Fourier, cuyas funciones bases son de forma senoidal, la trasformada *wavelet* está basada en pequeñas ondas (onditas) de variada frecuencia y duración limitada. Uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo, Gilbert Strang, profesor del MIT, compara estas dos transformaciones diciendo que, mientras la DFT nos proporciona solamente las frecuencias o notas de una obra musical, la DWT proporciona todo el pentagrama completo, es decir, las notas (frecuencia) y el momento específico que cada una de ellas ocurre (información temporal) [8].

La herramienta denominada teoría multiresolución [9] unifica e incorpora diversas técnicas y, como su nombre lo implica, está relacionada con el análisis de las señales o imágenes en más de una resolución.

Matemáticamente la transformada *wavelet* bidimensional se define de la siguiente forma:

$$W_{\Phi}(j_0,m,n)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\Phi_{j_0,m,n}(x,y)$$

$$W_{\Psi}^{i}(j,m,n)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\Psi^{i}_{j,m,n}(x,y) \quad i=\{H,V,D$$

Donde $\Phi(x,y)$ corresponde a diferentes versiones de la denominada función de escala y $\Psi(x,y)$ se conoce con el nombre de función *wavelet*. $W_{\Phi}$ son los coeficientes de aproximación y $W_{\Psi}^{i}$ se denominan coeficientes de detalles horizontal, vertical y diagonal, de acuerdo al valor $i$. A continuación se muestran los coeficientes de una transformada *wavelet* de 3 niveles y la imagen reconstruida a partir de ellos. Los coeficientes se distribuyen desde la parte superior izquierda, donde se encuentran los de aproximación. Alrededor de estos están los coeficientes de detalle de tercer nivel, horizontal (derecha), vertical (inferior) y diagonal (diagonal). Los coeficientes que se visualizan en la parte más exterior son los de detalle de primer nivel.

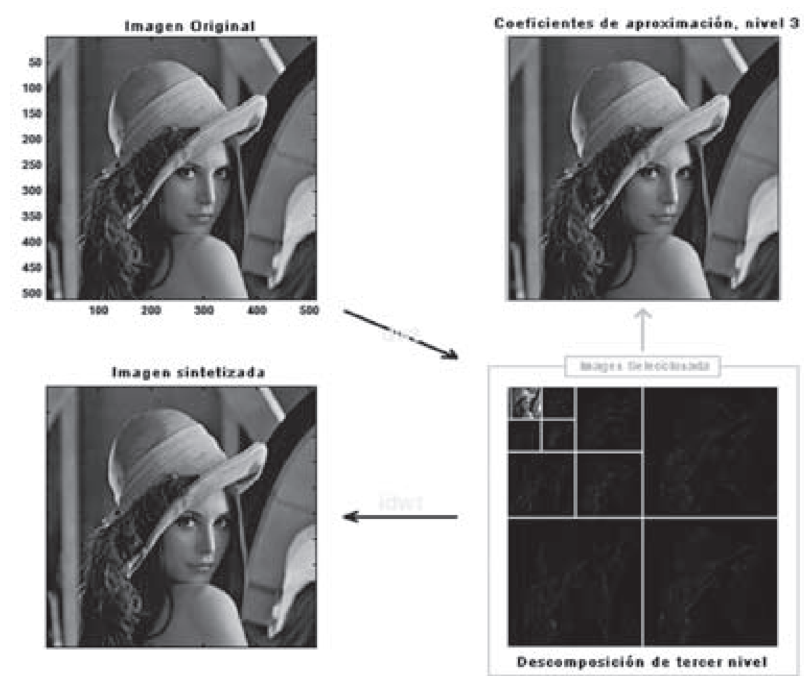



Figura 9. Transformada Wavelet usando la función wavelet Haar con tres niveles.

Como se mencionó anteriormente, la transformada *wavelet* ha abierto nuevas alternativas en los procesos de compresión de imágenes. Dentro del proceso de codificación de una señal cualquiera es muy común trabajar con una representación de ésta en un espacio que decorrelacione los diferentes datos. Esto se logra encontrando una transformación que genere unos coeficientes (espacio de características) que no posean información redundante, reduciendo de esta forma el tiempo de procesamiento y los requerimientos del sistema [10]. En el área de compresión de imágenes se ha incrementado el uso de transformadas multiresolución como las wavelets para la creación de nuevos estándares entre ellos el JPEG2000 y el MPEG4 [11, 12]. Una transformada multiresolución ofrece interesantes características que permiten un análisis más global de este tipo de señales. En especial el estándar JPEG2000 toma cada día más y más fuerza en el mundo de las imágenes gracias a su alta capacidad de compresión una con mínima pérdida de información fotorealística. Surge como un natural sucesor del estándar JPEG. En video, las bajas capacidades de los canales inalámbricos y la alta demanda de buena calidad hacen incesante la búsqueda de un estándar que brinde estás dos características a la vez. El análisis *wavelet* tridimensional surge entonces como una alternativa que busca implementar mediante los algoritmos de compresión MPEG4 y MPEG7 video de alta calidad y baja tasa de bits, para de esta forma buscar los límites en aplicaciones tales como la televisión de alta definición o la televisión digital.

El procesamiento de imágenes se ha tornado hoy en día en un área de basto conocimiento y en un campo de desarrollo aún más grande. Siendo así, y de acuerdo al proverbio anónimo, si “una palabra dice más que mil palabras”, muchas cosas más podríamos expresar con una imagen procesada.

## Notas

[1] El verbo que describe correctamente este comportamiento debe ser “discretizar” más que digitalizar, a pesar de no ser aceptado por la Real Academia de la Lengua Española. Una función discreta sólo toma valores específicos de la variable independiente, mientras una función digital toma valores finitos de la variable dependiente.

## Referencias


[1] Gonzales R., Woods R., *Digital Image Processing*. 2a ed. New jersey: Prentice Hall, 2002.

[2] Proakis J., *Tratamiento digital de señales: principios, algoritmos y aplicaciones*. 3ª ed. Madrid: Prentice Hall, 1998.

[3] Pratt W., *Digital Image Processing: PIKS Inside.* 3a ed. Los Altos (EE. UU.): John Wiley & Sons, 2001.

[4] Marr D., *Vision: A Computacional Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. San Francisco (EE. UU.): W. H. Freeman and Company, 1982.

[5] Jain A.K., *Fundamentals of Image Processing.* Englewood Cliffs (EE. UU.): Prentice-Hall International, 1989.

[6] Soliman S., *Continuous and Discrete Signals and Systems.* 2a ed. New jersey: Prentice Hall, 1998.

[7] Oppenheim, A. V. et ál., *Señales y sistemas*. 2ª ed. México: Prentice Hall, 1998.

[8] Strang G., “Wavelets”, *American Scientist.* No. 82. (Abril, 1994), pp. 250-255.

[9] Strang G, Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks.* Massachusetts: Wellesley, 1997.

[10] Antonini M., Barlaud M., Mathieu P., Daubechies I., “Image Coding Using Wavelet Transform”, *IEEE Transactions on Image Processing.* Vol. 1, No. 2. (Abril, 1992), pp. 205-220.

[11] Skodras A., Christopoulos C., Ebrahimi T., “The JPEG200 Still Image Compression Standard”, *IEEE Signal Processing Magazine.* (septiembre, 2001), pp. 36-58.

[12] Bailly, G., Elisei, F., Odisio, M., Pelé, D., Caillière, D. and Grein-Cochard, K. “Talking Faces for MPEG-4 Compliant Scalable Face to Face Telecommunication”, *Proceedings of the Smart Objects Conference*, 2003.