

El siguiente artículo presenta el modelo propuesto para el desarrollo del nivel de comprensión de resolución de problemas y que fuera generado en una investigación efectuada en la Corporación Universitaria Unitec,¹ tomando como variable independiente dos ambientes computacionales con diferentes niveles de interactividad.

Dicho modelo busca desarrollar el nivel de comprensión de resolución de problemas del estudiante tomando como base los conceptos de matrices y sus operaciones con problemas que pueden generar el nivel de comprensión de este tipo. La investigación tuvo como referencia los planteamientos de David Perkins² sobre el particular.

La solución de problemas en matrices y sus operaciones tiene en cuenta los modelos mentales que posee el estudiante para extraer esquemas cognitivos que puede aplicar a diferentes situaciones problemáticas planteadas por el ambiente computacional, tomando como datos de entrada problemas basados en hechos de la vida cotidiana. Los problemas se relacionan con el mundo real para facilitar la comprensión en la mente de los estudiantes.³

El ambiente computacional consiste en dos tipos de *software*: uno orientado por preguntas y otro por ejemplos. El *software* orientado por preguntas presenta una serie de interrogantes que conducen al estudiante a elaborar imágenes mentales que le permiten crear conocimientos sobre determinados objetos matemáticos, sus relaciones y sobre las leyes que guían sus operaciones. El *software* conducido por ejemplos extrae objetos matemáticos, sus relaciones y las leyes de sus operaciones a partir de problemas,

definiendo y explicando su naturaleza a los estudiantes. Adicionalmente, se presentan animaciones que apoyan la construcción de modelos mentales.⁴

Las formas para llegar a un estado de comprensión en el concepto de matriz y sus operaciones, están determinadas por los diferentes grados de interactividad brindados por los programas. En el *software* conducido por ejemplos la interactividad está dada por la navegación que puede realizar el estudiante de pantalla en pantalla o la escogencia del tema en un menú. Por su parte, en el *software* orientado por preguntas ésta está dada como un diálogo entre el programa y el estudiante.

A partir de diversos problemas, el estudiante es orientado por preguntas, facilitándose así la construcción de conceptos matemáticos y la determinación de las leyes para realizar operaciones que ocurren entre matrices. La navegación entre pantallas es limitada; depende de la actuación del estudiante frente a las preguntas del *software*. Una vez que todas las preguntas de una pantalla dada han sido contestadas adecuadamente, le es permitido pasar a la siguiente. Cuando el estudiante no contesta acertadamente, obtiene orientaciones sobre la situación o es guiado a través de nuevas preguntas para que construya el concepto apropiado.

Con base en la descripción anterior, se plantea el modelo para la investigación llamado *Modelo de adquisición de comprensión sobre matrices y sus operaciones* (MACSAO), que se estructura sobre tres conceptos: la interacción con el medio, los modelos mentales y las actividades de comprensión que demuestran el desarrollo de algún nivel de

comprensión; de esa forma se integra un modelo constituido por tres partes: el modelo mental previo, el aprendizaje y los ambientes computacionales y, finalmente, los ambientes de desarrollo.

Modelo mental previo

Éste toma en consideración los requisitos mínimos que una persona debe poseer para sacar provecho de los ambientes computacionales. Cuando una persona trata de resolver un problema en el dominio conceptual matemático, el razonamiento es guiado por los modelos mentales internalizados a través de las interacciones externas con situaciones concretas previas.⁵ La comprensión ocurre una vez que una representación mental de un concepto matemático en particular se ha conectado a la red existente de representaciones de una persona; desde la perspectiva psicológica se dice que ha acomodado la información.⁶ Fundamentada en estos conceptos, la investigación que se presenta toma como punto de partida la red existente de representaciones que el estudiante posee para lograr el desarrollo de la comprensión a través de las matrices y sus operaciones. Para el caso que nos ocupa, tales representaciones están encarnadas en las competencias de lecto-escritura, el manejo de las cuatro operaciones aritméticas básicas y las estrategias para solucionar problemas que involucren dichas cuatro operaciones.

Con las competencias de lecto-escritura se espera que el estudiante tenga un modelo mental correspondiente a ésta, la cual no solamente le permita identificar sucesiones de palabras sino que pueda construir imágenes mentales de la situación expuesta en el texto; es decir, que logre la comprensión total de las lecturas de los problemas, para que luego esté habilitado para generar actividades de comprensión que faciliten el acomodamiento de nuevas representaciones mentales a la red que ya posee.

Para la construcción de reglas de las operaciones entre las matrices, el estudiante se basa en el conocimiento que tiene de las operaciones aritméticas básicas y en el modelo mental de cómo se hacen estas operaciones. Otra manera de explicarlo es que

trae el conocimiento correspondiente a su memoria de largo plazo (MLP),⁷ y en el proceso debe descubrir el orden en que se realizan las operaciones en un acto de metacognición. Inicialmente se limita a contestar una serie de preguntas basadas en las operaciones básicas, pero cuando el sistema le plantea ejercicios en donde debe aplicar las reglas que debieron ser inferidas del proceso en el proceso de respuestas, el estudiante debe devolverse para reflexionar sobre su proceso de pensamiento.

Para resolver los cuestionamientos que el software orientado por preguntas le plantea al estudiante, éste debe ser capaz de emplear una serie de estrategias de resolución de problemas basándose en las operaciones básicas de la aritmética. Por ejemplo, pueden existir situaciones en donde se pide el costo total de un producto que está constituido de varias partes, de las cuales se conocen sus precios (conocer el costo de A, que está constituido de tres unidades de x y dos de z, en donde x cuesta s pesos y z cuesta t); si el estudiante no tiene el modelo mental correspondiente a la estrategia para resolver el problema, estará impedido para construir las reglas de las operaciones que se solicitan.

El aprendizaje y los ambientes computacionales

El sustento pedagógico del programa es la integración práctica de los conceptos de diferentes autores; entre éstos pueden señalarse: Wolfgang Schnotz y Maria Bannert,⁸ Andrew Harrop,⁹ David Perkins,¹⁰ Pearl Chen¹¹ y Juan Godino.¹² Los elementos esenciales de sus constructos teóricos son las imágenes mentales, la interacción, la metacognición y los niveles de comprensión; todos ellos se unen para formar un ambiente computacional que conduce a la comprensión.

Las imágenes se construyen a partir de representaciones descriptivas e icónicas que son procesos orientados a la formación de modelos mentales. Las imágenes descriptivas provienen de símbolos cuyo contenido se adquiere de manera convencional, surgiendo de la mediación del individuo en la relación entre un objeto y su

significante.¹⁴ El contenido de las imágenes visuales lo da su misma estructura. Existe una relación entre las imágenes mentales formadas por texto y las formadas por las imágenes visuales: a través del texto se crean imágenes visuales internas y a través de las imágenes visuales se crean textos. Una imagen formada del texto puede tener información equivalente a la que se presenta visualmente, pero se obtienen a partir de procesos diferentes. Así, una buena gráfica, que apoye el contenido textual, es útil para estimular la comprensión.¹⁵ En los ambientes computacionales se utilizan ambas formas para estimular la formación de modelos mentales. Se usa la forma textual para representar problemas de ambientes cotidianos del estudiante y para hacer las preguntas que activan modelos mentales que sirven de base para el razonamiento. La forma icónica se da por la representación misma del objeto matemático, por ejemplo, una matriz y sus componentes, con animaciones que resaltan estos últimos.

El papel de las imágenes mentales en el aprendizaje se puede inferir siguiendo los postulados de Goldin,¹⁶ quien afirma que un sistema de enseñanza necesita promover el desarrollo máximo de representaciones internas que faciliten la transferencia del aprendizaje.

La construcción de imágenes mentales es fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico y el pensamiento en términos de concepto. La ciencia cognitiva¹⁷ sugiere que la comprensión ocurre una vez que una representación mental de un concepto matemático particular se liga a la red existente de representaciones, concepto parecido a la noción de Piaget de asimilación y acomodación. Las representaciones internas son influenciadas por las representaciones externas y las relaciones que se establecen entre las relaciones internas son a su vez, influenciadas por las correspondientes relaciones externas; por eso, las representaciones matemáticas externas influyen sobre las representaciones matemáticas internas.¹⁸ La actividad de entender

y razonar se internaliza con el uso de imágenes mentales; por lo tanto, la comprensión depende de la habilidad de un sujeto de construir y razonar con imágenes mentales. Se espera que el manejo de los hipertextos e imágenes del programa propuesto sirvan de materia prima para enriquecer los modelos de los estudiantes y que la información perceptual les ayude a representar las ideas mentalmente.

Para construir conocimiento del mundo se debe actuar sobre los objetos que nos circundan y esta acción es la que provee su conocimiento; así, la mente organiza la realidad y actúa sobre ella. Como dijera Piaget: "Entender es descubrir o reconstruir por redescubrimiento."¹⁹ El individuo aprende con la interacción del medio ambiente en donde se desempeña. La participación en la interacción con el medio, como el mismo medio contribuyen a la formación de imágenes mentales²⁰ o a su modificación en concordancia con la respuesta que se obtiene de este ambiente; lo cual presenta el mismo proceso de construcción de estructuras cognitivas de Piaget, descrito en otros términos.

En el *software* orientado por preguntas se observa esta interacción. El estudiante, a través de los cuestionamientos, se aventura a dar respuestas, que luego modificará de acuerdo con las réplicas del entorno. Esta réplica se da en forma de nuevos cuestionamientos que guían el pensamiento de la persona que está inmersa en el proceso interactivo. Por otro lado, en el *software* conducido por ejemplos la única forma de interactividad es la capacidad del ambiente computacional de permitir la navegación a través de las diferentes pantallas. De esta manera, existe el estímulo de las diferentes formas de representación pero el estudiante no puede aventurarse a dar suposiciones con base en alguna forma de comunicación con el *software*.

El papel de la metacognición en el ambiente de aprendizaje orientado por preguntas es uno de los elementos claves del programa. Atendiendo a la

definición de Perkins de metacognición (la reflexión sobre el pensar -y sobre el aprendizaje-),²¹ en el ambiente computacional dicha función se manifiesta en el momento en el cual el estudiante se enfrenta a la pregunta. Incluso luego de haber construido objetos matemáticos y aplicado reglas para resolver la situación, su mundo mental se desequilibra; lo que lo conduce a revisar nuevamente los problemas para hacer explícitas las acciones que se llevaron a cabo en el proceso de resolución del problema y así evidenciar las reglas con cuya aplicación puede enfrentar los cuestionamientos de la nueva situación. Este proceso permite activar imágenes mentales y sus relaciones para desplegar actividades de comprensión que faciliten la acomodación de nuevas imágenes mentales a la red ya existente. La estrategia desequilibrante es la pregunta, la cual activa todo el proceso mental para la construcción de nuevo conocimiento.

En el ambiente conducido por ejemplos el estudiante por su propia iniciativa debe producir el proceso de metacognición, evaluando las imágenes mentales que el texto provee (este elemento no está contenido en este *software*).

La comprensión está influenciada por dos factores principales: las imágenes mentales y las actividades de comprensión. Estos dos factores se influyen mutuamente haciendo crecer la comprensión. La imagen mental es la razón del pensamiento, es con lo que pensamos y constituye la parte interna de la comprensión; las actividades de comprensión son el medio con el cual manifestamos la comprensión y nos permiten ir más allá de la mera posesión del conocimiento.²² En el *software* orientado a preguntas se le pide al estudiante que provea una información después de haber hecho la lectura correspondiente; con base a lo anterior se determina si posee el modelo mental del objeto con el que se está tratando. El objetivo es desarrollar la habilidad para formar o representar imágenes o, en su defecto, su modificación si la imagen preconcebida por el estudiante no corresponde a la deseada; esto contribuye a la construcción del conocimiento matemático que facilita al estudiante la posibilidad de realizar actividades de comprensión. Las actividades

de comprensión las despliega el estudiante en su proceso de utilización del conocimiento; entre ellas están: la aplicación, la explicación, la generalización, la justificación y la comparación. El estado final se puede expresar en palabras de Perkins: “es lograr capacitar al estudiante para que realice una variedad de actividades de comprensión vinculadas con el contenido que se está aprendiendo.”²³

La imagen física de una matriz se va desglosando en sus componentes: filas y columnas. La relación de estos dos últimos conceptos posibilita la formación del concepto de elemento y su ubicación dentro de una matriz. En este discurrir la imagen mental del objeto se torna compleja; en el proceso se van desarrollando signos lingüísticos que permitirán un manejo abstracto que conducirá a la construcción de conocimiento.

En el *software* orientado a preguntas, además de utilizar problemas para que el estudiante abstraiga objetos matemáticos, se le hacen preguntas para que despliegue sus actividades de comprensión y así demuestre la imagen mental que construye. Se pretende desarrollar el nivel de comprensión de resolución de problemas. Asociado a este existen diferentes actividades de comprensión que demuestran lo que se ha logrado dentro de este nivel. Se tienen actividades de identificación de variables, se aplican estrategias de solución de problemas y se explican y justifican los procedimientos para resolver los problemas. Hay actividades de resolución de problemas tendientes a potenciar las imágenes mentales correspondientes que, al mismo tiempo, sirven de base para construir conocimiento posteriormente, lo que facilita alcanzar los niveles de comprensión epistémico y de investigación en la medida en que el estudiante se ve forzado a explicar, justificar y hacer hipótesis sobre los posibles resultados de las pruebas que lleva a cabo en el proceso de construcción de ese conocimiento.

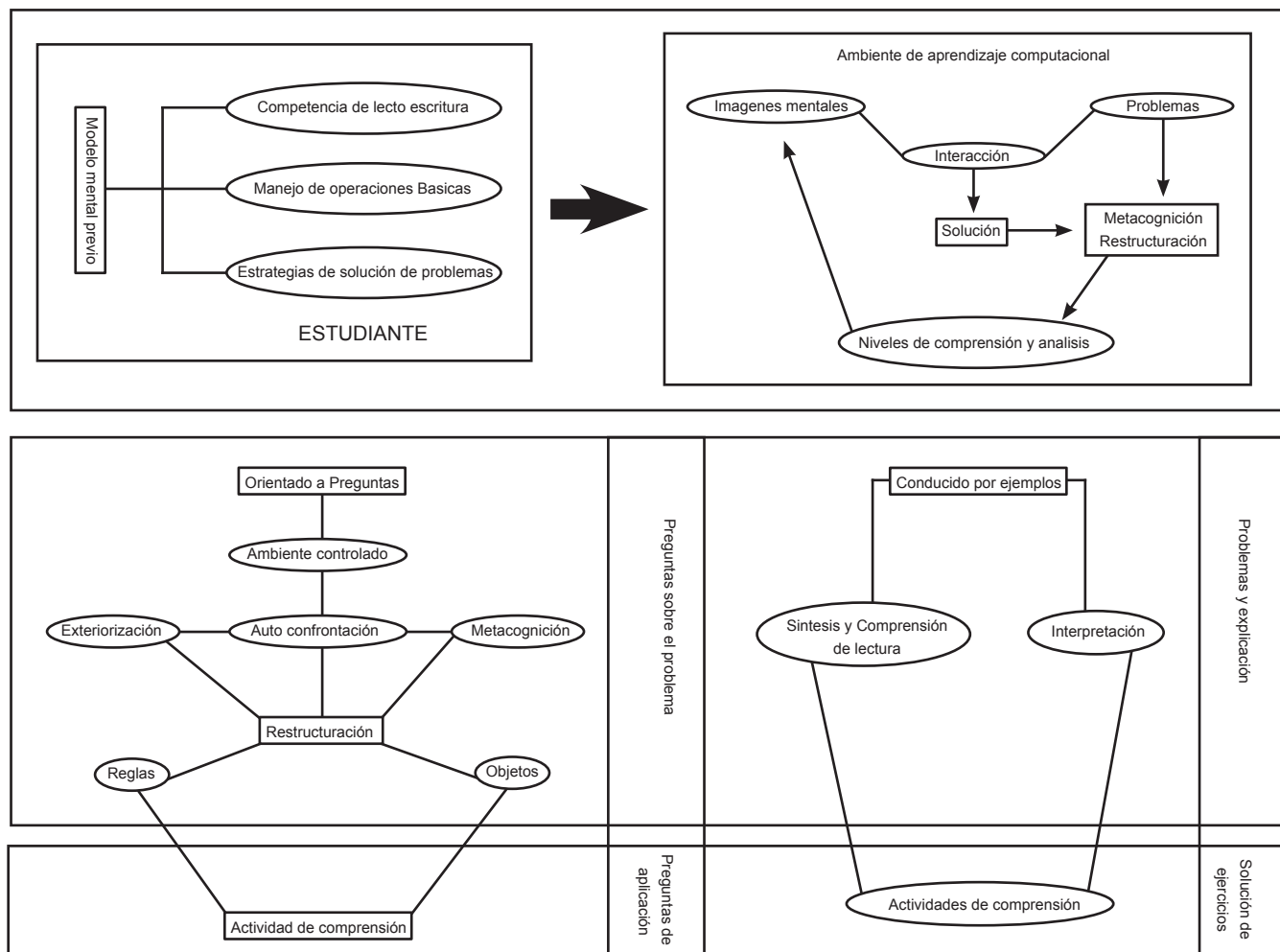
Ambientes de desarrollo

El estado final a alcanzar en los programas que hemos descrito es el desarrollo de la comprensión, para lo cual se debe avanzar a través de diferentes estados. A continuación se describen éstos para cada uno de los ambientes computacionales que, en conjunto, han sido llamados ambientes de desarrollo.

El ambiente orientado a preguntas funciona bajo una modalidad controlada. El estudiante no puede avanzar si no ha contestado correctamente las preguntas que van apareciendo en cada pantalla. Incluso cada pregunta es controlada; no se mostrará la siguiente hasta que se haya contestado satisfactoriamente la actual. De esta manera, se espera que se vayan construyendo modelos mentales de lo más simple a lo más complejo, logrando así la exactitud, generabilidad y especificidad del conocimiento. Las preguntas inducen a una exteriorización de los modelos mentales, lo que obliga al estudiante a hacer su conocimiento explícito al contestarlas. El ambiente computacional compara esta respuesta con la que posee en su dominio de conocimiento y genera, a su vez, un aviso de felicitación cuando encuentra correspondencia; o, en otros casos, sugerencias o preguntas que demuestran las inconsistencias en la estructura de conocimiento subyacente. De aquí se desprende un proceso de metacognición en donde se hace una auto-confrontación con la realidad y, de esta manera, se ve forzado a modificar o reorganizar sus modelos mentales.²⁴ La estrategia didáctica que se utiliza es la pregunta, la que permite a cualquier persona solucionar problemas utilizando modelos mentales previamente incorporados y reflexionar sobre su acción con base en los procesos de metacognición y auto-confrontación, lo que, de igual manera, facilita el proceso de acomodamiento y la reestructuración de modelos mentales que terminan con la construcción de objetos matemáticos y las relaciones que se derivan de ellos (como la inferencia de reglas que determinan sus operaciones). El nuevo modelo mental se hace evidente con el despliegue de las actividades de comprensión tales como la aplicación, la explicación, la inferencia, la construcción de hipótesis, la verificación y otras que se pueden



Figura 1. Modelo de adquisición de comprensión sobre matrices y sus operaciones.



Nivel de comprensión de resolución de problemas

presentar de acuerdo con la situación que se aborde; son éstas las que demuestran que se ha logrado el estado final propuesto: la comprensión.

El ambiente de desarrollo conducido por ejemplos permite la navegación libre por las diferentes pantallas que ofrece el *software*. El mismo estudiante decide si avanza o retrocede de acuerdo con la comprensión que puede hacer del tema. No se asegura un proceso de auto confrontación y metacognición, pero existe la posibilidad de que haya reflexión sobre el conocimiento que se va adquiriendo; lo anterior depende de las estrategias que utilice el sujeto cuando se enfrenta al ambiente. Los mecanismos que posee el individuo para llegar a la comprensión, definida como el estado final, son la síntesis, la comprensión de lectura y la interpretación. La estrategia didáctica que se usa para generar el desequilibrio cognitivo es la explicación, si bien no se cuenta con la posibilidad de producir

un choque conceptual brindado por la respuesta del ambiente. Mediante este proceso se llega a interpretar los objetos presentados y las reglas de sus operaciones y, mediante la solución de ejercicios por parte del ambiente computacional, se espera que el estudiante llegue al ya nombrado estado final.

La figura 1 es un diagrama del modelo propuesto; en resumen, el estudiante con sus modelos previos enfrenta el ambiente de aprendizaje computacional y sus dos entornos; después de haber sido influenciado por alguno de éstos, ocurre una modificación del modelo mental que servirá como modelo previo para enfrentar otros ambientes ya sean computacionales o no.

Conclusiones

La investigación mostró que el grupo sometido al entorno orientado a preguntas tuvo un desempeño significativamente mejor en el nivel de resolución de problemas que el que utilizó el *software* conducido por ejemplos. Este resultado se dio probablemente por la interacción brindada por el ambiente computacional. De acuerdo con la teoría piagetiana, la participación de sujeto en una situación conduce al aprendizaje significativo. La interacción se configuró por medio de la interactividad reflexiva que facilita el intercambio de información con el ambiente computacional, además de la retroalimentación brindada por el entorno que conduce al estudiante a la evaluación permanente de sus modelos mentales. Otros descubrimientos relacionados con la investigación tienen que ver con el tiempo en el sistema; los estudiantes que tuvieron mejor desempeño demoraron menos tiempo en completar el laboratorio, probablemente por poseer modelos mentales que les ayudaron a construir más eficientemente su conocimiento. A continuación se presenta una síntesis de los resultados principales:

- El entorno orientado a preguntas promueve mejor la adquisición del nivel de comprensión de resolución de problemas que el entorno conducido por ejemplos.
- Hay una relación inversa entre el puntaje obtenido en la prueba escrita y el tiempo de utilización de los entornos computacionales sustentado posiblemente en los modelos previos que posee el estudiante.
- Las interactividades de actualización, de apoyo y de reflexión ejercen un efecto positivo sobre el nivel de comprensión de resolución de problema alcanzado.
- El entorno orientado a preguntas requiere de menos tiempo para promover los niveles de comprensión.

Notas

- ¹ Luis E. Otero, "Efectos de dos entornos computacionales sobre el nivel de comprensión de resolución de problemas en los temas concepto de matriz y sus operaciones". Corporación Universitaria Unitec, 2006.
- ² David Perkins, La escuela de la inteligencia. Barcelona: Gedisa, 2003.
- ³ Andrew G. Harrop, A Prototype Computer Based-learning Environment for Teaching Calculator Representations. [en línea] University of Leeds, Reino Unido. Disponible en internet en la dirección: www.ppi.org/papers/11th-harrop. (Acceso noviembre 10 de 2003).
- ⁴ Wolfgang Schnotz y Maria Bannert, "Construction and Interference in Learning from Multiple Representations." Learning and Construction. Vol. 13, No. 2 (2003), p. 141-156.
- ⁵ Harrop, óp. cit., p. 2.
- ⁶ Ibíd, p. 3.
- ⁷ Grupo Tecnice, La complejidad en la solución de problemas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2005, p. 90.
- ⁸ Schnotz y Bannert, óp. cit.
- ⁹ Harrop, óp. cit.
- ¹⁰ Perkins, óp. cit.
- ¹¹ Pearl Chen y Diane McGrath, "Knowledge Construction and Knowledge Representation in High School Students' Design of Hypermedia Documents." Educational Multimedia and Hypermedia. Vol. 12. No. 1 (2003), pp. 33-61.
- ¹² Juan D. Godino, Marco teórico de referencia sobre la cognición matemática. [PDF]. Disponible en internet en la dirección: www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/02_MarcosCM.pdf. (Acceso: 10 de noviembre de 2003).
- ¹³ Schnotz y Bannert, óp. cit.
- ¹⁴ Godino, óp. cit.
- ¹⁵ Schnotz y Bannert, óp. cit.
- ¹⁶ G. A. Goldin, "Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving." En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Compilado por C. Janvier. London: Lawrence Erlbaum, 1987, pp. 125-145.
- ¹⁷ Harrop, óp. cit, p. 3.
- ¹⁸ Godino, óp. cit., p. 20.
- ¹⁹ J. Piaget, To Understand is to Invent. New York: Viking Press Inc., 1972.
- ²⁰ Harrop, óp. cit.
- ²¹ Perkins, óp. cit., p. 103.
- ²² Ibíd, p. 82.
- ²³ Ibíd, p. 84.
- ²⁴ Chen, óp. cit., p. 35.

Referencias

- ANDERSON, J. R. Rules of mind. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1993.
- BARKER, P. "Designing interactive learning." En Design and Production of Multimedia and Simulation-based Learning Material, editado por T. de Jong y L. Sarti. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- CHEN, Pearl y Diane McGRATH Diane. "Knowledge Construction and Knowledge Representation in High School Students' Design of Hypermedia Documents." Educational Multimedia and Hypermedia. Vol. 12. No. 1 (2003), pp. 33-61.
- CHENG, Peter. "Electrifying Diagrams for Learning: Principles for Complex Representational Systems." Cognitive Science. Vol. 26 (2002), pp. 685-736.
- GLASGOW, J. I., H. NARAYANAN, CHANDRASEKARAN. Diagrammatic reasoning. Cambridge: Massachusetts: AAA1/MIT Press, 1995.
- GODINO, Juan D. Marco teórico de referencia sobre la cognición matemática. [PDF]. Disponible en internet en la dirección: www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/02_MarcosCM.pdf (Acceso: 10 de noviembre de 2003).
- GOLDIN, G.A. "Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving." En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Compilado por C. Janvier. Londres: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
- GRUPO TECNICE. La complejidad en la solución de problemas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2005.
- HARROP, Andrew G. A Prototype Computer Based-learning Environment for Teaching Calculator Representations. [En línea] University of Leeds, Reino Unido. Disponible en internet en la dirección: www.ppi.org/papers/11th-harrop (Acceso noviembre 10 de 2003).
- LARKIN, J. y H. SIMON. "Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words." Cognitive Science. 11, (1987), pp. 65-99.
- PAIVIO, A. Mental Representation: A Dual Coding Approach. Oxford, Inglaterra: Oxford University Press, 1986.
- PARRA, Jaime. Artificios de la mente. Bogotá: Círculo de lectura alternativa, 2002.
- PERKINS, David. La escuela de la inteligencia. Barcelona: Gedisa, 2003.
- PIAGET, J. To Understand is to Invent. New York: Viking Press, 1972.
- SCHNOTZ, Wolfgang y Maria Bannert. "Construction and Interference in Learning from Multiple Representations." Learning and construction. Vol. 13, No. 2. (2003), p. 141-156.
- ZHANG, J. "The nature of external representations in problem solving". Cognitive Science. 21 (1997), pp. 179-217.